XXXI SEMANA NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

Conjuntos no numerables y un juego infinito de números reales

Rodrigo Alejandro Esquivel Castillo

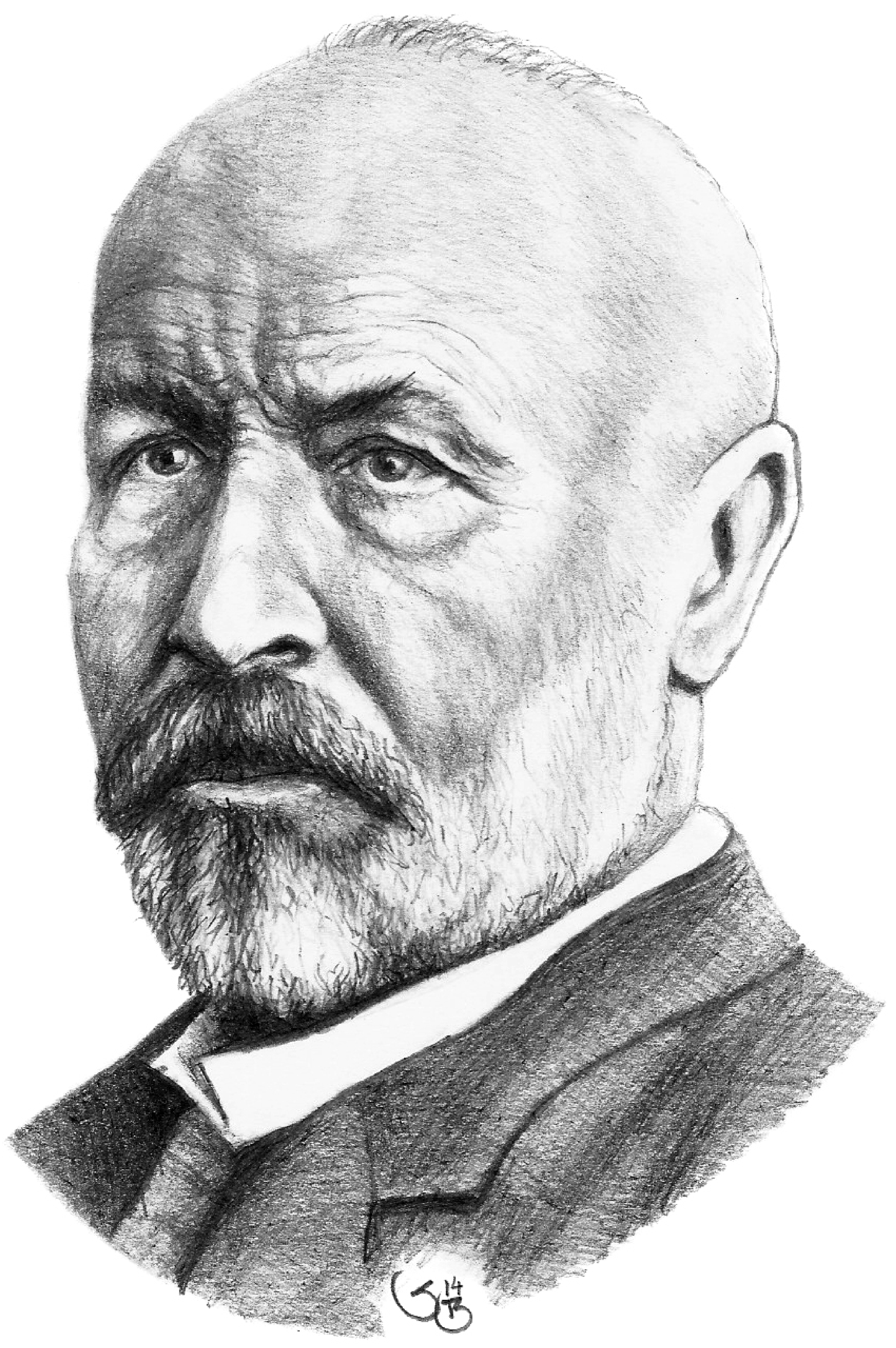
Introducción

En el siguiente trabajo probaremos un resultado interesante del análisis matemático; los conjuntos perfectos son no numerables. Llegaremos a este resultado por medio de un método refrescante como lo es un juego.

Considere usted el siguiente juego:
Alice y Bob deciden jugar el siguiente juego infinito en la recta real. Fijan $S \subset [0,1]$ y Alice mueve primero escogiendo cualquier numero real a_1 entre 0 y 1, Bob hace el siguiente movimiento escogiendo un real b_1 que esté entre a_1 y 1. Podemos precisar mejor los movimientos de Bob y Alice de la siguiente manera: Supongamos $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$, entonces en la ronda $n \geq 1$, Alice escoge un a_n de tal forma que $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$ mientras Bob toma un b_n de tal modo que $a_n < b_n < b_{n-1}$. Sea $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, Alice gana si $\alpha \in S$ y Bob gana si $\alpha \notin S$.

Conjuntos No Numerables

Recordemos que un conjunto no vacío X es llamado numerable si es posible enlistar los elementos de X en una sucesión. Equivalentemente X se dice numerable si existe una función f biyectiva tal que $f : \mathbb{N} \to X$.
Recordemos que fue *Georg Cantor* quien probó usando su famoso argumento de la diagonal que el intervalo real $[0,1]$ es no numerable. A continuación nosotros nos encargaremos de dar una prueba diferente a este mismo resultado.



Georg Cantor (1845-1918)

Una Estrategia Ganadora Para Bob

Proposición 1. Si S es numerable, entonces Bob tiene una estrategia ganadora.
Prueba: Ya que S es numerable, podemos enumerar los elementos de S como $s_1,\ s_2,\ s_3 \ldots$. Consideremos la siguiente estrategia de Bob. En la ronda $n \geq 1$, él escoge $b_n = s_n$ si es un movimiento legal, de otra forma el escoge aleatoriamente cualquier numero permitido para b_n. Sea $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ tenemos que $a_n < \alpha \leq \beta < b_n\ \forall\ n$ lo cual implica que $\alpha \notin S$. Esto significa que Bob tiene una estrategia ganadora.

■

Veamos que si $S = [0,1]$, entonces claramente Alice gana sin importar como juegue. Por tanto deducimos el siguiente corolario:

Corolario 1. El intervalo $[0,1]$ es no numerable.

Esta prueba es en muchos sentidos más sencilla que la que dio *Georg Cantor*.

Conjuntos Perfectos

A continuación probaremos una generalización de que $[0,1]$ es no numerable sin dejar de lado nuestro juego, pero añadiendo algunas herramientas del análisis.

Dado un conjunto $X \subset [0,1]$, haremos las siguientes definiciones

(*) Un **punto limite** de X es un punto $x \in [0,1]$ tal que $\forall\ \varepsilon > 0\ X \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)/\{x\} \neq \emptyset$

(**) X es **perfecto**, si $X = L(X)$ y $X \neq \emptyset$.

(***) Diremos que $x \in [0,1]$ es **accesible por la derecha** si para cada $\varepsilon > 0$ el intervalo $(x, x+\varepsilon)$ contiene un elemento de X y lo denotaremos como $x \in X^+$. De manera análoga definiremos **accesible por la izquierda** usando el intervalo $(x-\varepsilon, x)$ y denotaremos como $x \in X^-$

Una Estrategia Ganadora Para Alice

Lema 1. Si S es perfecto, entonces $\inf S \in S^+$
Prueba: La definición de ínfimo implica que $\inf S$ no es accesible por la izquierda, como $\inf S$ es punto limite de S, a fortiori $\inf \in S^+$.

■

Lema 2. Si S es perfecto y $a \in S^+$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ el intervalo $(a, a+\varepsilon)$ también contiene un elemento de S^+.
Prueba: Como $a \in S^+$ podemos tomar 3 puntos $x,\ y,\ z \in S$ tales que $a < x < y < z < a+\varepsilon$. Ya que $y \in (x,z) \cap S$, el número real $\gamma := \inf(x,z) \cap S$ satisface $x \leq \gamma \leq y$. Si $\gamma = x$, entonces por la definición de ínfimo tenemos que $\gamma \in S^+$. Si $\gamma > x$, $\gamma \in S = L(S)$ y al ser $(x,\gamma) \cap S = \emptyset$ implica $\gamma \notin S^-$ y a fuerzas $\gamma \in S^+$.

■

Estos dos lemas nos permiten deducir:

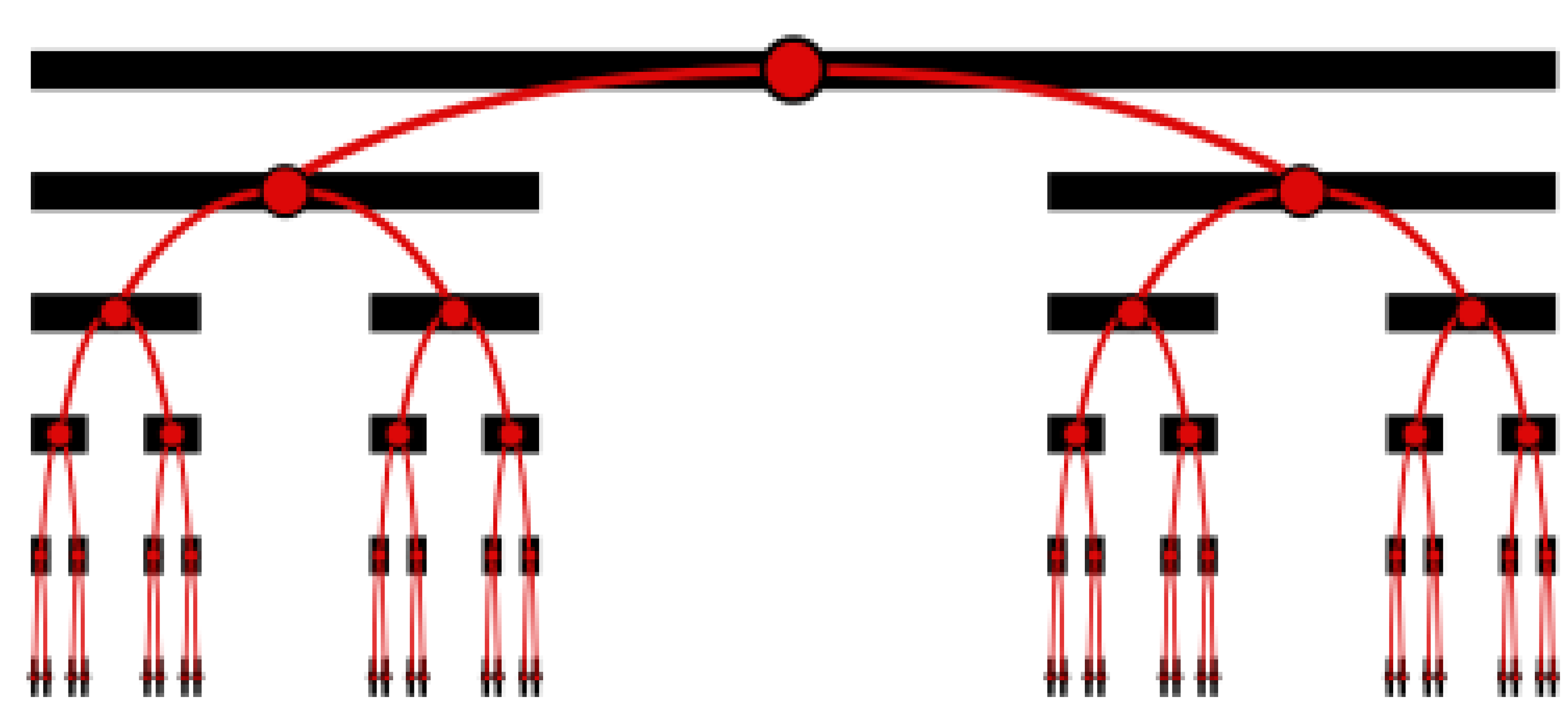
Proposición 2. Si S es perfecto, entonces Alice tiene una estrategia ganadora.
Prueba: La única restricción de Alice en n-vo movimiento es que $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$. Por inducción se sigue de los Lema 1 y 2 que Alice siempre puede elegir a_n como elemento de S^+. Ya que S es cerrado, entonces $\alpha \in S$, lo que implica que Alice gana.

■

Corolario 2. Todo conjunto perfecto es no numerable.

Un Conjunto Perfecto Interesante

Es fácil ver que $\mathbb{R}$ todo intervalo cerrado es perfecto, pero si queremos un ejemplo más interesante, piense usted en el siguiente conjunto que se construye con carácter recursivo, este elimina en cada paso el segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo. A este conjunto se le llama *conjunto de Cantor*.



Conjunto de Cantor (Ilustración)

Bibliografía

[1] Matthew H. Baker.Uncountable Sets and an Infinite Real Number Game. Mathematics Magazine, Dec., 2007, Vol. 80, No. 5 (Dec., 2007), pp. 377-380.

[2] Mícheál Ó Searcóid. Metric Spaces (2nd edition), Springer , 2007.

[3] Kenneth A. Ross. Elementary Analysis (2nd edition), Springer, 2005.